

Hochschild (co)homology

☆ de Rham cohomology

① 複体 $\mathcal{A}^k(U) = \{U \text{ 上の } C^\infty \text{ な } \mathbb{C} \text{ 値 } k\text{-形式}\}$

d : 全微分

$$\mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

$\uparrow$ q_{is}

$\mathbb{C}_x$: 局所定数層の fine resol.

② コホモロジー

$H_{dR}^k(X; \mathbb{C})$: ($\mathbb{C}$ 係数) de Rham cohomology

$\cong$ de Rham thm.

$H^k(X, \mathbb{C}_x)$ (層コホモロジーとして)

③ 導来同値との関係

$$\mathbb{D}_\mathcal{D} : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y) \quad : \text{同値なら}$$

$$\mathbb{D}_\mathcal{D}^H : H_{dR}^*(X; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(Y; \mathbb{C}) \quad : \text{同型}$$

$$\mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

$\parallel$

$\parallel$

$\parallel$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}^{0,0} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}^{1,0} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{2,0} & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow \bar{\partial} & \oplus & \searrow & \oplus & \searrow & \\ & & \mathcal{A}^{0,1} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{1,1} & \longrightarrow & \dots \\ & & & \searrow & \oplus & \searrow & \\ & & & & \mathcal{A}^{0,2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

で精密化する。↓

☆ Dolbeault cohomology

① 複体 $A^{p,q}(\mathcal{U}) = \{ \mathcal{U} \text{ 上の } C^\infty \text{ な } (p,q) \text{ - 形式} \}$

$\bar{\partial}$: $\bar{\partial}$ - 作用素

$$A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

$\uparrow$ $q=0$

Ω^p : 正則 p - 形式の fine resol.

② コホモロジー

$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$: ($\mathbb{C}$ 係数) Dolbeault cohomology

$\cong$ Dolbeault thm.

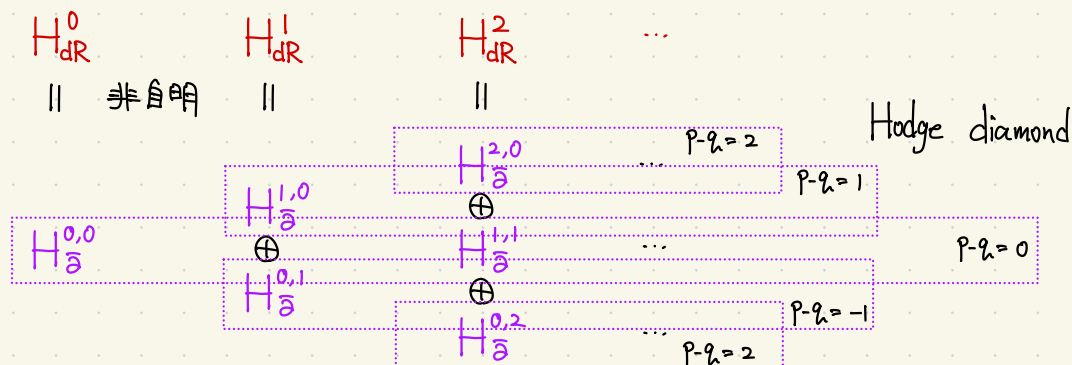
$H^q(X, \Omega^p)$ (層コホモロジーとして)

③ 導来同値 との関係

$$\Phi_{\mathcal{D}} : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y) : \text{同値な } \mathcal{D}$$

$$\Phi_{\mathcal{D}}^H : \bigoplus_{p+q=i} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=i} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(Y) : \text{同型}$$

☆ Dolbeault & de Rham



各 は導来同値で保たれる.

Dolbeault
thm. $\bigoplus_{p+q=n-i} H^q(X, \wedge^p \Omega)$ 基礎体 $\mathbb{C}$ に関係ない対象.

Q. 導来同値のもとで

① 基礎体 $\mathbb{C}$ に依存しない方法で

$\bigoplus_{p+q=n-i} H^q(X, \wedge^p \Omega)$ の保存性証明できるか?

② 捩束側の counterpart

$\bigoplus_{p+q=i} H^q(X, \wedge^p T)$ の保存性同時に証明できるか?

③ 標準環 $R(X)$

$\bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \omega_X^l)$ の保存性同時に証明できるか? ⇐ これは deg. ごとにも保存性がある...

→ 全ての情報を持つ親玉ワソビカ環の保存性欲しい!

HH

★了了了.

$$1 \leq i \leq n, \quad L: X \hookrightarrow X \times X, \quad \omega := L^* \omega_X$$

Fact. $L^* \wedge^p \mathcal{T}_X \cong \mathcal{E}xt_{X \times X}^p(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$ (Q. 気持ちも分らない...)

$$\textcircled{2} \quad \bigoplus_{p+q=i} H^q(X, \wedge^p \mathcal{T}) = \bigoplus_{p+q=i} H^q(X \times X, \mathcal{E}xt_{X \times X}^p(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta))$$

→ "↓" local $\Rightarrow$ global spec. seq.

$$\mathcal{E}xt_{X \times X}^i(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$$

$\Rightarrow$ spec. seq. は退化 (Swan, Kottsevich)

$$\Downarrow \text{ は } \mathbb{Z} \text{ に } \mathbb{Z} \text{ まで } \mathcal{D} \text{ (HKR iso)}$$

$$\wedge^p \Omega \cong \wedge^{n-p} \mathcal{T} \otimes \omega$$

$$\textcircled{1} \quad \bigoplus_{p+q=n-i} H^q(X, \wedge^p \Omega) = \bigoplus_{p+q=n-i} H^q(X, \wedge^{n-p} \mathcal{T} \otimes \omega)$$

→ "↓" local $\Rightarrow$ global spec. seq.

$$\mathcal{E}xt_{X \times X}^i(\mathcal{O}_\Delta, \omega)$$

$\Rightarrow$ spec. seq. は退化 (Swan, Kottsevich)

$$\Downarrow \text{ は } \mathbb{Z} \text{ に } \mathbb{Z} \text{ まで } \mathcal{D} \text{ (HKR iso)}$$

$$\textcircled{3} \quad H^0(X, \omega_X^l) = \mathcal{E}xt_X^0(\mathcal{O}_X, \omega_X^l) = \mathcal{E}xt_{X \times X}^0(\mathcal{O}_\Delta, \omega)$$

☆ Hochschild (co)homology

$$\omega_\Delta := L^* \omega_X$$

$$\begin{array}{c} d \\ \downarrow \\ i \end{array}$$

$R(X)$: 標準環

...	$\text{Ext}_{X \times X}^0(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$	$\text{Ext}_{X \times X}^0(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta)$	$\dots$	$\text{Ext}_{X \times X}^0(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^2)$	...
	$\text{Ext}_{X \times X}^1(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$	$\text{Ext}_{X \times X}^1(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta)$		$\text{Ext}_{X \times X}^1(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^2)$	
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	$\text{Ext}_{X \times X}^{2n}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta)$	$\text{Ext}_{X \times X}^{2n}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta)$	$n \geq n$		

$HH^*(X)$
: Hochschild
cohomology 環

$\cap$
加群

$HH_*(X)$
: Hochschild
homology

PD Hux
上環, FM
(次数 n 付)

$$HH(X) := \bigoplus_{i,l} HA_{i,l}(X) \quad : \text{2重次数の正環}$$

$$HA_{i,l}(X) := \text{Ext}_{X \times X}^i(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^l)$$

特に

$$HH^*(X) := \bigoplus_{i,l} HA_{i,0}(X) \quad : \text{Hochschild cohomology}$$

: 次数の正部分環

$$HH_*(X) := \bigoplus_{i,l} HA_{i,l}(X) \quad : \text{Hochschild homology}$$

: 次数の正 HH^* 加群

$$\Phi : D^b(X) \simeq D^b(Y) \text{ は、}$$

Thm.

$$\Phi^{HH} : HH(X) \cong HH(Y) \quad : \text{次数の正環 の同型}$$

$$\Phi^{HH^*} : HH^*(X) \cong HH^*(Y) \quad : \text{次数の正環 の同型}$$

$$\Phi^{HH_*} : HH_*(X) \cong HH_*(Y) \quad : \text{次数の正加群 の同型 を誘導する。}$$

prf. $R(X) \cong R(Y)$ の構成が 全体に延長する。

★ Hochschild - Kostant - Rosenberg 同型

$$\begin{array}{ccc}
 HH^0(x) & HH^1(x) & HH^2(x) \\
 \parallel & \parallel & \parallel \\
 H^0(x, \wedge^0 \mathcal{T}) & H^0(x, \wedge^1 \mathcal{T}) \oplus H^1(x, \wedge^0 \mathcal{T}) & H^0(x, \wedge^2 \mathcal{T}) \oplus H^1(x, \wedge^1 \mathcal{T}) \oplus H^2(x, \wedge^0 \mathcal{T})
 \end{array}$$

各 $\square$ は導来同値で保たれる.

HKR iso

$$\begin{array}{l}
 HH_0(x) \\
 \vdots \\
 HH_n(x) \\
 \vdots \\
 HH_{2n}(x)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 H^0(x, \wedge^0 \Omega) \\
 \\
 \end{array}
 \oplus
 \begin{array}{l}
 H^0(x, \wedge^1 \Omega) \\
 \oplus \\
 H^1(x, \wedge^0 \Omega)
 \end{array}
 \oplus
 \begin{array}{l}
 H^0(x, \wedge^2 \Omega) \\
 \oplus \\
 H^1(x, \wedge^1 \Omega) \\
 \oplus \\
 H^2(x, \wedge^0 \Omega)
 \end{array}$$

各 $\square$ は導来同値で保たれる.

Thm. $\Phi_{\mathcal{F}} : D^b(x) \xrightarrow{\sim} D^b(y) : \text{同値な}$

$$\Phi_{\mathcal{F}}^{HH^*} : \bigoplus_{p+q=i} H^q(x, \wedge^p \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=i} H^q(y, \wedge^p \mathcal{T}) : \text{同型}$$

$$\Phi_{\mathcal{F}}^{HH_*} : \bigoplus_{p-q=i} H^q(x, \wedge^p \Omega) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p-q=i} H^q(y, \wedge^p \Omega) : \text{同型}$$

Q.

$$\Phi_{\mathcal{D}} : D^b(X) \simeq D^b(Y)$$

① 複素構造由来の

$$\Phi_{\mathcal{D}}^H : H_{dR}^*(X; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(Y; \mathbb{C})$$

U| U| S.39

$$\bigoplus_{p+q=i-n} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=i-n} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(Y)$$

$\cong$ $\cong$ Dolbeault thm.

$$\bigoplus_{p+q=i-n} H^q(X, \wedge^p \Omega_X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=i-n} H^q(Y, \wedge^p \Omega_Y)$$

② Hochschild ホモロジー由来の

$$\Phi_{\mathcal{D}}^{HH} : HH(X) \xrightarrow{\sim} HH(Y)$$

U| U|

$$\Phi_{\mathcal{D}}^{HH*} : HH_i(X) \xrightarrow{\sim} HH_i(Y)$$

この2つは
同一でない。

$$\bigoplus_{p+q=i-n} H^q(X, \wedge^p \Omega_X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=i-n} H^q(Y, \wedge^p \Omega_Y)$$

$\cong$ $\cong$ HKR iso

③ Conj.

$$\Phi_{\mathcal{D}}^H : H_{dR}^*(X; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(Y; \mathbb{C})$$

$\sqrt{\text{td}(X)} \uparrow \quad \mathbb{Q} \quad \uparrow \sqrt{\text{td}(Y)}$

$$\Phi_{\mathcal{D}}^{HH*} : HH_i(X) \xrightarrow{\sim} HH_i(Y)$$